Correction des exercices (Terminale S)

Merci de me signaler les erreurs éventuelles.

Exercice 1 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x + 5}$$

Avant tout, déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f : c'est l'ensemble des réels différents de -5. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

1. Pour déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x de l'ensemble de définition D_f de f, on réduit la deuxième expression au même dénominateur.

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x+5} = \frac{(ax+b)(x+5)+c}{x+5} = \frac{ax^2 + bx + 5ax + 5b + c}{x+5}$$

Puis par identification avec la première expression donnée, on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad \frac{2x^2 - x - 1}{x+5} = \frac{ax^2 + (b+5a)x + 5b + c}{x+5}$$

donc :

$$\begin{cases} a & = 2 \\ b + 5a & = -1 \\ 5b + c & = -1 \end{cases}$$

qui donne les valeurs :

$$\begin{cases} a & = 2 \\ b & = -11 \\ c & = 54 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = 2x - 11 + \frac{54}{x+5}}$$

2. La nouvelle expression est de la forme $ax+b+\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. La droite Δ d'équation $y = 2x - 11$ est donc asymptote à $\mathcal{C}$ aussi bien au voisinage de $-\infty$ qu'au voisinage de $+\infty$. D'autre part, la droite d'équation $x = -5$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.
Donc,

$$\boxed{\text{Les droites asymptotes à } \mathcal{C} \text{ sont } \Delta : y = 2x - 11 \text{ et } D : x = -5}$$

Exercice 2

1. La fonction Φ est de la forme : $\Phi(x) = \dfrac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 1}$ où α et β sont des réels à déterminer. Deux informations sont nécessaires pour déterminer ces deux paramètres. Chacun des deux critères de l'énoncé permet d'obtenir une équation reliant α et β. Une fois les deux équations obtenues, nous pourrons résoudre le sytème de deux équations à deux inconnues et déterminer α et β.

– $I(3,5)$ étant un point de (Γ), on a $\Phi(3) = 5$. D'où :

$$\Phi(3) = \frac{9+3\alpha+\beta}{2} = 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3\alpha+\beta = 1$$

– (Γ) possède une tangente horizontale au point I. Mathématiquement, ceci se traduit par : $\Phi'(3) = 0$, le nombre dérivée en 3 étant le coefficient de la tangente à (Γ) au point I. Calculons $\Phi'(x)$:

$$\Phi'(x) = \frac{(2x+\alpha)(x-1)-(x^2+\alpha x+\beta)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-\alpha-\beta}{(x-1)^2}$$

Et la condition impose que :

$$\Phi'(3) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3-\alpha-\beta}{4} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha+\beta = 3$$

Ainsi, les valeurs de α et β sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 3\alpha+\beta &= 1 \\ \alpha+\beta &= 3 \end{cases}$$

Résolvons ce système :

$$\begin{cases} 3\alpha+\beta &= 1 \\ \alpha+\beta &= 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha &= -2 \\ -2\beta &= -8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha &= -1 \\ \beta &= 4 \end{cases}$$

La fonction Φ répondant aux critères imposés est donc la fonction :

$$\boxed{\Phi \;:\; x \to \frac{x^2-x+4}{x-1}}$$

2. Il s'agit de la deuxième écriture, car :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \Phi(x) = \frac{x^2-x+4}{x-1} = \frac{x^2-x}{x-1} + \frac{4}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} + \frac{4}{x-1} = x + \frac{4}{x-1}$$

Donc on a aussi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \Phi(x) = x + \frac{4}{x-1}}$$

3. Nous connaissons déjà l'expression de la dérivée Φ' en remplaçant α par -1 et β par 4 dans la formule trouvée dans la question 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad \Phi'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

Le signe de $\Phi'(x)$ est le même que celui de x^2-2x-3 puisque $(x-1)^2$ est strictement positif dans l'ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
On remarque que -1 est une racine de x^2-2x-3, donc : $x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$. Le signe de x^2-2x-3 est négatif sur l'intervalle $[-1,3]$ et positif ailleurs. Le tableau de variation est donc :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$\Phi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Limites aux bornes :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x & = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x-1} & = 0 \end{cases} \implies \lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} (\Phi(x) - x) = 0$$

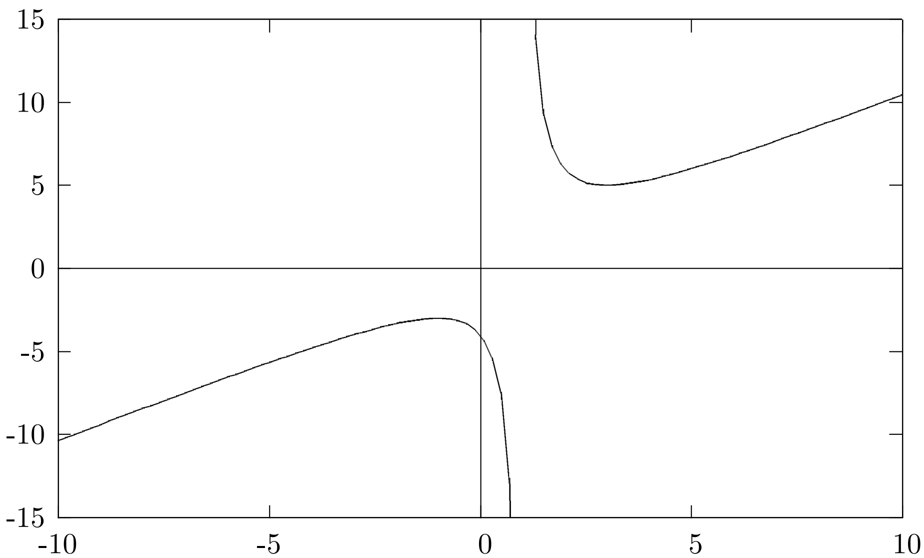
Ainsi, la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (Γ) au voisinage de $-\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x-1} & = 0 \end{cases} \implies \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (\Phi(x) - x) = 0$$

Ainsi, la droite Δ est aussi asymptote à (Γ) au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} x & = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4}{x-1} & = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4}{x-1} & = +\infty \end{cases} \implies \lim_{x\to 1^-} \Phi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} \Phi(x) = +\infty$$

Donc la droite D d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (Γ).



4. Il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées pour que le point $A(1, 1)$ soit centre de symétrie de (Γ) :

– L'ensemble de définition D_Φ est symétrique par rapport à x_A
– $\forall x \in \mathcal{D}_\Phi, \quad \Phi(2x_A - x) + \Phi(x) = 2y_A = 2$

La première condition est safisfaite puisque les deux trous -1 et 3 sont symétriques par rapport à 1.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathcal{D}_\Phi, \quad \Phi(2x_A - x) + \Phi(x) &= \Phi(2 - x) + \Phi(x) \\
&= 2 - x + \frac{4}{2 - x - 1} + x + \frac{4}{x - 1} \\
&= 2 - \frac{4}{x - 1} + \frac{4}{x - 1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Les deux critères sont donc vrais ce qui conclut la démonstration.

5. Soit : $(E_m) : \Phi(x) = m$.

$$(E_m) \quad \Longrightarrow \quad y = m \text{ et } y = \Phi(m)$$

Il faut imaginer un balayage du plan par le faisceau de droites parallèles à l'axe des abscisses et repérer le nombre de points d'intersection de chacune de ces droites (d'équation $y = m$) avec la courbe (Γ).

– Si $m \in \{-3, 5\}$, alors (E_m) a une unique solution (voir tableau de variations).
– Si $m \in]-3, 5[$, alors (E_m) a n'a pas de solution.
– Si $m \in]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$, alors (E_m) a exactement deux solutions.

6. Pour justifier cette conjecture, il suffit de profiter du tableau de variation de Φ et de la continuité de Φ sur chacun des intervalles : $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires justifiant définitivement l'observation.

Tout d'abord, $\Phi(D_\Phi) =]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$. Ensuite :
– (E_m) n'a donc pas de solutions si $m \in]-3, 5[$.
– (E_{-3}) n'a qu'une solution qui est -1.
– (E_5) n'a qu'une solution qui est 3.
– Pour tout réel $m \in]-\infty, -3[$, (E_m) a exactement deux solutions : la plus petite est dans l'intervalle $]-\infty, 1[$ et l'autre dans $]-1, 1[$.
– Pour tout réel $m \in]5, +\infty[$, (E_m) a exactement deux solutions : la plus petite est dans l'intervalle $]1, 3[$ et l'autre dans $]3, +\infty[$.

Exercice 3 Soit f définie par $f(x) = 3\sqrt{x} - \dfrac{2x}{x^2 + 1}$. Déterminer D_f, $D_{f'}$ puis dériver la fonction f.

La fonction f est définie sur $x \in \mathbb{R}^+$ car $x^2 + 1$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$. La fonction racine est définie sur R^+ mais dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc f de même.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2x^2 - 2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}}$$

Exercice 4

1.

$$e^{4x+1} = e^{-5x+4} \quad \iff \quad 4x+1 = -5x+4 \quad \iff \quad 9x = 3 \quad \iff \quad x = 3$$

Donc :

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$$

2. $3e^{2x} + 4e^x - 7 = 0$

Sachant que le carré de e^x est e^{2x} :

$$3e^{2x} + 4e^x - 7 = 0 \quad \iff \quad P(e^x) = 0, \quad \text{où} \quad P(X) = 3X^2 + 4X - 7$$

On remarque que 1 est racine de P, et donc : $P(X) = (X-1)\left(X + \frac{7}{3}\right)$.

Ainsi,

$$3e^{2x} + 4e^x - 7 = 0 \quad \iff \quad e^x = 1 \quad \text{ou} \quad e^x = -\frac{7}{3}$$

La deuxième solution est impossible car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc :

$$3e^{2x} + 4e^x - 7 = 0 \quad \iff \quad x = 0$$

Finalement :

$$\boxed{S = \{0\}}$$

3. On se donne une fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. Pour résoudre $f'(x) = \frac{1}{4}$, signalons que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant la forme $\frac{u}{v}$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x\left(e^x+1\right) - e^x \times e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

Revenant à l'équation, ceci donne :

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{1}{4} \quad &\Longleftrightarrow \quad 4e^x = (e^x+1)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4e^x = (e^x)^2 + 2e^x + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (e^x - 1)^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad e^x = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = 0
\end{aligned}
$$

Finalement :

$$\boxed{S = \{0\}}$$

Exercice 5

1. (a) φ est bien définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ et y est dérivable puisque de la forme $U \ln V$ où U et V sont deux fonctions rationnelles, V étant strictement positive sur $]1,+\infty[$.

$$\varphi'(x) = \frac{4x(x^2-1) - 2x^2 \times 2x}{(x^2-1)^2} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} - \frac{2x}{x^2-1}$$

Nous arrêtons le calcul sans simplifier plus puisque le renseignement que l'on cherche est immédiat. En effet, la dérivée de φ est strictement négative sur l'intervalle $]1,+\infty[$. La fonction φ est donc strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2}{x^2-1} & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x^2-1) & = -\infty \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2-1) = -\infty \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

D'où le tableau de variation de la fonction φ :

x	1		θ		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\|\|$		$-$		
$\varphi(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(b) φ est continue sur $]1,+\infty[$ et prend des valeurs positives et négatives (voir tableau de variation). En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons en déduire que φ s'annule au moins une fois dans $]1,+\infty[$.

De plus, φ est strictement monotone (décroissante) sur $]1,+\infty[$, elle ne s'annule donc qu'une fois. Soit θ l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ dans $]1,+\infty[$. Du fait de la stricte monotonie de φ sur $]1,+\infty[$, si $\varphi(3.19)$ et $\varphi(3.2)$ sont de signes opposés, alors nous pourrons affirmer que $3.19 < \theta < 3.2$.

Avec la calculatrice, on a $\varphi(3.19) \approx 1.4.10^{-3}$ et $\varphi(3.2) \approx -7.10^{-3}$. Vérification réussie !

2. (a) Soit $g = \dfrac{\ln U}{V}$ avec $U(x) = x^2 - 1$ et $V(x) = x$.

   U et V sont des fonctions polynômes donc dérivables sur $]1,+\infty[$. U est strictement positive sur $]1,+\infty[$, donc $\ln U$ est à son tour dérivable sur $]1,+\infty[$. Par conséquent, puisque g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]1,+\infty[$, V ne s'annulant pas sur $]1,+\infty[$, g est à son tour dérivable sur $]1,+\infty[$.

$$g'(x) = \frac{\dfrac{2x}{x^2-1} \times x - \ln(x^2-1)}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

   Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]1,+\infty[, \quad \text{signe}(g'(x)) = \text{signe}(\varphi(x))}$$

   (b) D'après la conclusion précédente, g est strictement croissante sur l'intervalle $]1,\theta]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[\theta,+\infty[$. En effet, φ étant strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ et s'annulant en θ, φ est strictement négative sur $]1,\theta]$ et strictement positive sur $[\theta,+\infty[$. En 1, $\ln U$ tend vers $-\infty$ et V vers 1, donc g tend vers $-\infty$. En $+\infty$, levons l'indétermination en écrivant :

$$g(x) = \frac{\ln(x-1)}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x-1)}{x-1} \times \frac{x-1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}$$

   D'une part,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

   et d'autre part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

   Finalement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$$

   Avec $M = g(\theta)$, le tableau de variation est donc :

x	1		θ		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

(c) Rappelons que θ est l'unique solution dans $]1,+\infty]$ de l'équation $\varphi(x)=0$. Ainsi : $\ln(\theta^2-1)=\dfrac{2\theta^2}{\theta^2-1}$. De la sorte, nous obtenons comme demandé :

$$\boxed{g(\theta)=\frac{\frac{2\theta^2}{\theta^2-1}}{\theta}=\frac{2\theta}{\theta^2-1}}$$

(d) Profitons de l'encadrement donné à la question 1.b). Il y a deux procédés classiques pour encadrer $g(\theta)$:

– Par encadrements successifs

– A l'aide du sens de variation de la fonction $\Psi : x\to\dfrac{2x}{x^2-1}$

En essayant par encadrements successifs ne permet pas d'obtenir l'amplitude demandée. On vérifie que la dérivée de Ψ est strictement négative sur l'intervalle $]1,+\infty]$. Nous en déduisons un encadrement : $\Psi(3.2)<\Psi(\theta)<\Psi(3.19)$, c'est-à-dire l'encadrement $\Psi(3.2)<g(\theta)<\Psi(3.19)$. De celui-ci, nous dégageons l'encadrement suivant qui convient : $0.692<g(\theta)<0.696$. Donc 0.694 est une valeur approchée de $g(\theta)$ à 2.10^{-3} près.

3. (a) C'est évident si on constate d'une part, que $(e^x)^2=e^{2x}$ et d'autre part, que e^x décrit l'intervalle $]1,+\infty]$ lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Ou bien on utilise les propriétés liées au sens de variation de composées de fonctions, ou bien on dérive et on profite de l'étude de g. Dérivons f. Comme $f=g\circ\exp$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'=(f'\circ\exp)\times\exp'$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f'(x)=e^xg'(e^x)$$

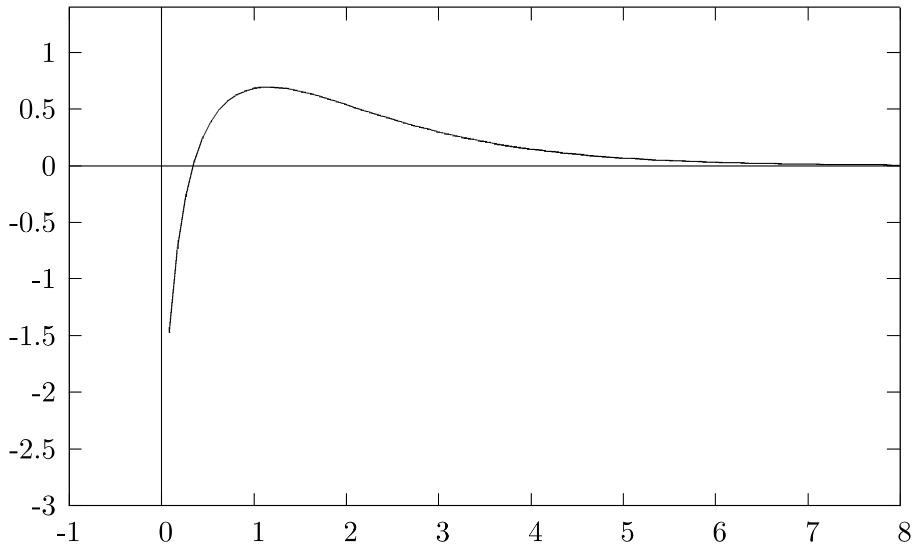
$$\begin{array}{lllll}
\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad g'(e^x)=0 & \iff & e^x=\theta & \iff & x=\ln\theta\\
\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad g'(e^x)<0 & \iff & e^x>\theta & \iff & x>\ln\theta\\
\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad g'(e^x)>0 & \iff & e^x<\theta & \iff & x<\ln\theta
\end{array}$$

Le tableau de variation de f en découle. Notons que $f(\ln\theta)=g(\theta)=M$ et que les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$ s'obtiennent par composition de limites.

x	0		$\ln\theta$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

4. L'axe des ordonnées est asymptote vertical à $\mathcal{C}$ puisque $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$. L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. $\mathcal{C}$ possède une tangente horizontale au point de coordonnées $(\ln\theta,g(\theta))$. Pour terminer, comme f est continue et prend des valeurs

négatives puis positives, f s'annule au moins une fois (TVI) dans $]0, \theta[$. Comme f y est strictement monotone, f ne s'annule qu'une fois dans cet intervalle. Dans l'intervalle $[\ln \theta, +\infty[$, f est strictement positive. Ainsi, $\mathcal{C}$ et son asymptote horizontale se coupent en un seul point. Notons A ce point. $\mathcal{C}$ est sous (Ox) sur $]0, x_A[$ et au-dessus (Ox) sur $]x_A, +\infty[$.



Exercice 6

1. **(Initialisation)** Pour tout entier naturel n, W_n est situé dans $]1.2; 1.3[$. C'est donc le cas de W_0. En terme de distances, il est évident que $|W_0 - \alpha| \leq |1.2 - 1.3|$ (faire un dessin pour s'en convaincre). Nous avons donc bien $|W_0 - \alpha| \leq 0.1$. Soit encore, $|W_0 - \alpha| \leq 0.1 \times 0.2^0$. L'initialisation de la récurrence est donc validée.

   (Héritage) Emettons l'hypothèse de récurrence : Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel p, c'est-à-dire : $|W_p - \alpha| \leq 0.1 \times 0.2^p$. Démontrons alors que : $|W_{p+1} - \alpha| \leq 0.1 \times 0.2^{p+1}$. Profitons de l'hypothèse de récurrence et de la propriété remarquable de la suite. D'une part :

   $$|W_{p+1} - \alpha| \leq 0.1 \times 0.2^p$$

   et d'autre part :

   $$|W_p - \alpha| \leq 0.1 \times 0.2^p$$

   Alors :

   $$0.2|W_p - \alpha| \leq 0.2 \times 0.1 \times 0.2^p = 0.1 \times 0.2^{p+1}$$

   Par transitivité de la relation d'ordre $\leq$ (c'est-à-dire que si $a \leq b$ et que $b \leq c$, alors $a \leq c$), on a donc :

   $$|W_{p+1} - \alpha| \leq 0.1 \times 0.2^{p+1}$$

   Donc la propriété est vraie à l'ordre $p + 1$.

(Conclusion) Par le principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |W_n - \alpha| \leq 0.1 \times 0.2^n}$$

2. Pour justifier que la suite converge vers α, il suffit de montrer que la suite (t_n) de terme général 0.1×0.2^n converge vers 0. La conclusion est immédiate par le théorème d'encadrement. La suite (t_n) considérée est une suite géométrique de raison $|0.2| < 1$, donc (t_n) converge bien vers 0.

$$\boxed{\text{La suite } (W_n) \text{ converge vers } \alpha}$$

3. $|W_n - \alpha| \leq 0.1 \times 0.2^n$ signifie que W_n est une valeur approchée de α à 0.1×0.2^n près. Il suffit donc que la condition $0.1 \times 0.2^n \leq 10^{-5}$ soit remplie pour affirmer que W_n est une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

$$0.1 \times 0.2^n \leq 10^{-5} \quad \iff \quad 0.2^n \leq 10^{-4} \quad \iff \quad n\ln(0.2) \leq \ln(10^{-4}) \quad \iff \quad n \geq \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0.2)}$$

Attention, l'ordre s'inverse car $\ln(0.2) < 0$. La calculatrice donne : $\dfrac{\ln(10^{-4})}{\ln(0.2)} \approx 5.72$ donc à partir du rang 6, W_n sera une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Exercice 7 $(\mathcal{C})$ a pour équation $y = f(x) = 2x + 2 - \dfrac{3e^x}{e^x + 1}$ et représente donc la fonction f. Δ est la représentation de la fonction affine $g(x) = 2x + 2$. f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.
Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{3e^x}{e^x+1} > 0$, on a aussi $2x + 2 > f(x)$, c'est-à-dire $g(x) > f(x)$. Ainsi, Δ est au-dessus de $(\mathcal{C})$. Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - g(x) = 0$, Δ est l'asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.
$\mathcal{R}$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) \leq y \leq g(x)$$

$\mathcal{R}$ est une portion du plan infinie dont l'aire semble cependant finie d'après la question posée.

L'aire $\mathcal{R}$ est égale à (si la limite existe) :

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^0 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{dx}$$

Pour $t \leq 0$,

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_t^0 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{dx} = \int_t^0 (g(x) - f(x)) \, \mathrm{dx} \\ &= \int_t^0 3 \times \frac{e^x}{e^x + 1} \, \mathrm{dx} \\ &= [2\ln(e^x + 1)]_0^t \\ &= 3\ln 2 - 3\ln(e^t + 1) \end{aligned}$$

Lorsque t tend vers $-\infty$, e^t tend vers 0 et par composition des limites, on obtient :

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^0 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{dx} = 3\ln 2$$

$$\boxed{\text{L'aire de } \mathcal{R} \text{ est donc égale à } 3\ln 2}$$

Exercice 8

1. Remarquons d'abord que 0 n'est pas solution de (E).
   Ecrivons alors z sous forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$, ρ étant le module et θ l'argument modulo 2π.

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^3 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho^3 e^{3i\theta} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

   (E) a alors trois solutions distinctes qui sont relatives, par exemple, à $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$.

$$e^{0i} = 1 \qquad e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad e^{i\frac{-2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Classiquement en mathématiques, on note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

2. $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = \bar{j}$

3. Une bonne méthode est de calculer les trois distances :

$$\begin{aligned} AB &= |aj - a| = |a| \times |j - 1| \\ AC &= |aj^2 - a| = |a| \times |j^2 - 1| = |a| \times |\bar{j} - 1| = |a| \times |\overline{j - 1}| = |a| \times |j - 1| = AB \\ BC &= |aj^2 - aj| = |a| \times |j| \times |j - 1| = |a| \times |j - 1| = AB \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est un triangle équilatéral}}$$

Exercice 9

1. $A \notin \mathcal{P}$ car $x_A + 2y_A - 3z_A = 1$ et $1 \neq 10$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ et le vecteur $\overrightarrow{n_P}$ de coordonnées $(1, 2, -3)$ normal à $\mathcal{P}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel λ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{n_P}$. Ce qui revient à dire que H appartient à la droite D passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{n_P}$. On a donc :

$$\begin{cases} x_H - x_A &= \lambda \\ y_H - y_A &= 2\lambda \\ z_H - z_A &= -3\lambda \end{cases} \qquad \text{soit :} \qquad \begin{cases} x_H &= 2 + \lambda \\ y_H &= 1 + 2\lambda \\ z_H &= 1 - 3\lambda \end{cases}$$

   De plus, $H \in \mathcal{P}$. D'où : $x_H + 2y_H - 3z_H = 10$. Alors : $2 + \lambda + 2(1 + 2\lambda) - 3(1 - 3\lambda) = 10$. En résolvant cette équation, on trouve $\lambda = \dfrac{9}{14}$.
   Remplaçons λ par sa valeur dans le système pour obtenir les coordonnées de H : $H\left(\dfrac{27}{14}, \dfrac{6}{7}, \dfrac{17}{14}\right)$.
   La distance d est égale à la distance AH, soit encore $|\lambda| \times ||\overrightarrow{n_P}||$. Cette observation permet d'éviter le calcul des coordonnés de $\overrightarrow{AH}$.

$$d = \frac{9}{14}\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \frac{9\sqrt{14}}{14}$$

On aurait aussi pu utiliser la formule classique du cours :

$$d = \frac{|x_A + 2y_A - 3z_A - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

3. Une équation de la sphère Σ est :

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9}$$

4. (a) $\mathcal{P}$ et Σ sont sécants si et seulement si la distance du centre de la sphère Σ au plan $\mathcal{P}$ est inférieure ou égale au rayon de la sphère Σ.
   Comparons $d(A;\mathcal{P})$ et 3, c'est-à-dire d et 3, pour constater immédiatement que $d < 3$ et donc que Σ et $\mathcal{P}$ sont effectivement sécants.

   (b) M est un point de l'intersection $\Sigma \cap \mathcal{P}$ si et seulement si M est un point de Σ tel que HAM soit un triangle rectangle en H.
   Puisque $AM = 3$ et $AH = d$, la distance HM est constante (Pythagore). Nous retrouvons bien ainsi que leur intersection est un cercle.
   Ce cercle $\mathcal{C}$ a pour centre H et pour rayon le nombre réel positif r tel que $d^2 + r^2 = 3^2$ d'après Pythagore.

$$\frac{1}{14} + r^2 = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{125}{14}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{70}}{14}$$

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est le cercle de centre } H \text{ et de rayon } \frac{5\sqrt{70}}{14}.}$$

Exercice 10

1. f est une densité de probabilité si les conditions suivantes sont vérifiées :
   - f est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$
   - $\int_0^{+\infty}$ f(x) dx=1

   Si la limite $\lim\limits_{t \to +\infty} \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{dx}$ existe et est finie, on la note $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = 1$.
   Preuve des conditions à remplir :
   - f est évidemment positive sur $\mathbb{R}^+$.
   - f est évidemment continue sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.
   - $f(1) = \lambda e^{-1}$. Les limites à gauche et à droite en 1 sont égales à $f(1)$.

   La fonction f est donc continue en 1 et donc finalement sur $\mathbb{R}^+$.
   - Pour $x > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt} &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{dt} + \int_1^x f(t)\,\mathrm{dt} \\
&= \left[\lambda \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-t^2}\right]_0^1 + \left[\frac{\lambda}{e} \times \left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^x \\
&= -\frac{1}{2}\lambda(e^{-1} - 1) + \frac{\lambda}{e}\left(1 - \frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{dt} = -\frac{1}{2}\lambda(e^{-1} - 1) + \frac{\lambda}{e} = \lambda \times \frac{1+e}{2e}$$

Avec la condition sur la valeur de l'intégrale, on obtient alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{dt} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{2e}{1+e}$$

Finalement,

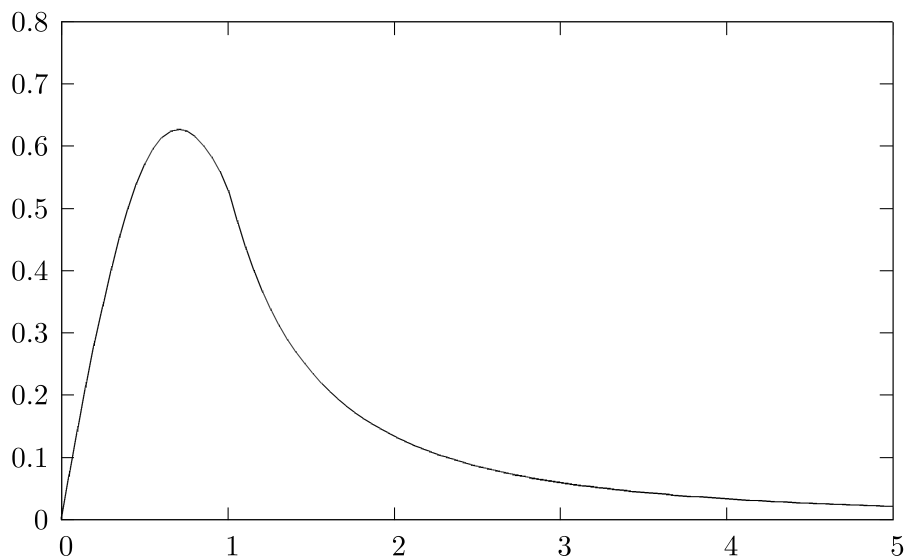
$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } \lambda = \frac{2e}{1+e}}$$

Etudions maintenant la fonction f définie avec cette valeur de λ. f est dérivable au moins sur chacun des intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

$$\forall x \in [0,1[, \quad f'(x) = \frac{2e}{e+1}\left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2}$$
$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{2e}{e+1}\left(\frac{-2}{ex^3}\right)$$

Le signe de la dérivée ne pose aucun problème. Le nombre dérivé à gauche de f en 1 vaut $-\dfrac{2}{e+1}$ et à droite, il vaut $-\dfrac{4}{e+1}$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. La limite en $+\infty$ vaut 0.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗	M	↘		↘	0



2. (a) $P(X \leq 1) = P(0 \leq X \leq 1)$.
   Alors : $P(X \leq 1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{dt} = -\frac{1}{2}\lambda\left(e^{-1} - 1\right) = -\frac{e}{e+1} \times \frac{1-e}{e} = \frac{e-1}{e+1}$.

   (b) $P(X = 2) = 0$, d'après le cours.

   (c) On considère ici l'évènement $X > e$.

$$\begin{aligned}
P(X > e) &= 1 - P(0 \leq X \leq e) \\
&= 1 - P(0 \leq X \leq 1) - P(1 \leq X \leq e) \\
&= 1 - \frac{e-1}{e+1} - \int_1^e \frac{2}{e+1}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} \\
&= 1 = \frac{e-1}{e+1} - \frac{2}{e+1}\left[-\frac{1}{x}\right] - 1^e \\
&= \frac{2}{e(e+1)}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{P(X \leq 1) = \frac{e-1}{e+1} \qquad P(X = 2) = 0 \qquad P(X > e) = \frac{2}{e(e+1)}}$$

Exercice 11

1. (a) En 0, la limite de ln en $-\infty$ et la limite de l'inverse est alors égale à 0. La limite de l'exponentielle en 0 est 1. D'où, par composition des limites, $f(x)$ tend vers 1 en 0, c'est-à-dire $f(0)$: f est alors continue en 0.
   A gauche de 1, $\ln x$ tend vers 0 par valeurs négatives et donc son inverse tend vers $-\infty$ et alors par composition avec la fonction exponentielle, la limite à gauche de f en 1 vaur 0, c'est-à-dire $f(1)$. Donc f est continue à gauche en 1.

   (b) A droite de 1, $\ln x$ tend vers 0 par valeurs positives et donc son inverse vers $+\infty$. Par composition encore, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. Ainsi, f n'est pas continue à droite en 1.

   (c) f est de la forme e^U où U est dérivable sur chacun des intervalles proposés. Par conséquent, f est dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Calculons $f'(x)$:

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2}\exp\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

   Cette dérivée est évidemment strictement négative sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ donc f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

La limite de f en $+\infty$ vaut 1 puisque $\ln x$ tend vers $+\infty$ et donc son inverse vers 0 alors que l'exponentielle tend vers 1 en 0.

2. (a) Commençons par les deux cas particuliers, à savoir 0 et 1 :

$$(f \circ f)(0) = f\left(f\left(0\right)\right) = f(1) = 0$$

$$(f \circ f)(1) = f\left(f\left(1\right)\right) = f(0) = 1$$

Passons au cas général :

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad (f \circ f)(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln(f(x))}\right) = \exp\left(\frac{1}{\ln\left(\exp\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)}\right) = \exp\left(\ln x\right) = x$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (f \circ f)(x) = x}$$

(b) Analyse des deux appartenances :

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x)$$

$$N(y,x) \in \mathcal{C} \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \mathcal{D}_f \text{ et } x = f(y)$$

Comme $f(\mathcal{D}_f) = \mathcal{D}_f$ (voir tableau de variation), si $x \in \mathcal{D}_f$, alors $y = f(x)$ appartient à $\mathcal{D}_f$. Si $y = f(x)$, alors $f(y) = f(f(x))$ alors $f(y) = x$ d'après la question précédente.
Première conclusion :

$$\boxed{\text{si } M(x,y) \in \mathcal{C} \text{ alors } N(y,x) \in \mathcal{C}}$$

En permutant x et y qui jouent un rôle symétrique dans le raisonnement détaillé précédemment, la dernière implication se traduit par : si $N(y,x) \in \mathcal{C}$, alors $M(x,y) \in \mathcal{C}$. Conclusion :

$$\boxed{M(x,y) \in \mathcal{C} \text{ si et seulement si } N(y,x) \in \mathcal{C}}$$

(c) $M(x,y)$ et $N(y,x)$ sont images l'un de l'autre par la réflexion (symétrie orthogonale) d'axe Δ d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.
Par conséquent,

$$\boxed{\Delta \text{ est un axe de symétrie de la courbe } \mathcal{C} \text{ représentative de la fonction } f.}$$

3. (a) Pour démontrer que $\mathcal{C}$ possède une tangente verticale au point $A(0,1)$, démontrons que le taux d'accroissement de la fonction f en 0 a une limite infinie en 0.
Pour x un strictement positif et différent de 1,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) - 1}{x} = \frac{\exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) - 1}{\frac{1}{\ln x}} \times \frac{1}{x \ln x}$$

Cette dernière écriture, bien qu'a priori plus complexe, a le mérite de faire apparaître deux limites de référence puisque l'inverse de ln a pour limite 0 en 0.

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)-1}{\dfrac{1}{\ln x}} = \lim_{T\to 0} \frac{e^T-1}{T} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0^- \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty}$$

(b) L'image d'une droite verticale par la symétrie orthogonale S_Δ d'axe Δ est une droite horizontale. La réflexion S_Δ conserve la nature d'une figure. Comme Δ est axe de symétrie de la courbe de f, l'image de la tangente à $\mathcal{C}$ en A, qui est verticale, par S_Δ est la tangente en B à $\mathcal{C}$ qui elle, est horizontale.

(c) $\mathcal{C} \cap \Delta$ est l'ensemble des points $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient les trois conditions suivantes : $x \in \mathcal{D}_f$, $y = x$ et $y = f(x)$.
Commençons par remarquer que ni 0 ni 1 ne vérifie l'équation $f(x) = x$. Pour x strictement positive et différent de 1,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = x \\ &\iff \frac{1}{\ln x} = \ln x \\ &\iff (\ln x)^2 = 1 \\ &\iff |\ln x| = 1 \\ &\iff \ln x = 1 \quad \text{ou} \quad \ln x = -1 \\ &\iff x = e \quad \text{ou} \quad x = e^{-1} \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\mathcal{C} \cap \Delta = \left\{E(e,e)\ ,\ F(e^{-1},e^{-1})\right\}}$$

Pour montrer qu'en chacun des points E et F la tangente à $\mathcal{C}$ est perpendiculaire à Δ, il suffit de calculer les coefficients directeurs de ces tangentes et de constater qu'ils sont égaux à -1.
Rappels :

– Dans un repère orthonormé, deux droites non verticales sont perpendiculaires si le produit de leur coefficients directeurs est -1 (on peut démontrer ce résultat en utilisant le produit scalaire des deux vecteurs directeurs des deux droites).
– Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α est le nombre $f'(\alpha)$.

Ici, le calcul est élémentaire et l'on a bien $f'(e) = -1$ et $f'(e^{-1}) = -1$ qui prouve l'orthogonalité avec la droite $\Delta : y = x$ de coefficient directeur égal à 1.