Correction des exercices (Premières S)

Merci de me signaler les erreurs éventuelles.

Exercice 1

1. Le calcul du discriminant donne : $\Delta = 9 - 4 \times (-2) \times 5 = 49$, d'où :

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{-3+7}{-4} = -1 \\ x_2 &= \dfrac{-3-7}{-4} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{S = \left\{-1\,,\, \frac{5}{2}\right\}}$$

2. $\Delta = \left[-(3+\sqrt{2})\right]^2 - 4 \times 1 \times 3\sqrt{2} = 11 - 6\sqrt{2} = (3-\sqrt{2})^2$

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}}{2} = 3 \\ x_2 &= \dfrac{3+\sqrt{2}-3+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{S = \left\{3\,,\, \sqrt{2}\right\}}$$

3. Posons $X = x^2$, on a alors l'équation $2X^2 + 9X + 4 = 0$ à résoudre. $\Delta = 81 - 4 \times 2 \times 4 = 49$.

$$\begin{cases} X_1 &= \dfrac{-9+7}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ X_2 &= \dfrac{-9-7}{4} = -4 \end{cases}$$

   Valables pour $X = x^2$, ces deux racines sont strictement négatives alors que x^2 est forcément positif, d'où on déduit qu'il n'y a pas de solution : $\boxed{S = \emptyset}$.

4. $\Delta = [-(\alpha+\beta)]^2 - 4 \times 1 \times \alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2$.

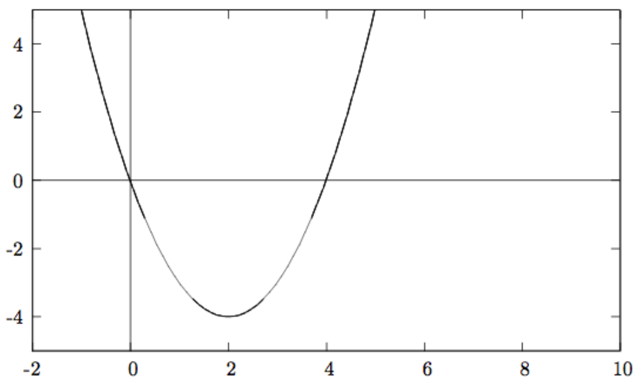
$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2} = \alpha \\ x_2 &= \dfrac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2} = \beta \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{S = \{\alpha\,,\, \beta\}}$$

Exercice 2 La courbe représentative de f est représentée sur la Figure 1(a). On obtient $\mathcal{C}_g$ à partir de $\mathcal{C}_f$ par une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses (Figure 1(b)). Pour $\mathcal{C}_h$ (Figure 1(c)), si $f(x) \geq 0$, alors $h(x) = f(x)$, sinon $h(x) = -f(x)$. Pour $\mathcal{C}_k$ (Figure 1(d)), si $x \geq 0$ alors $k(x) = f(x)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}, k(-x) = f(|-x|) = f(x)$ donc la fonction k est paire et alors sa courbe est symétrique par rapport à (Oy).

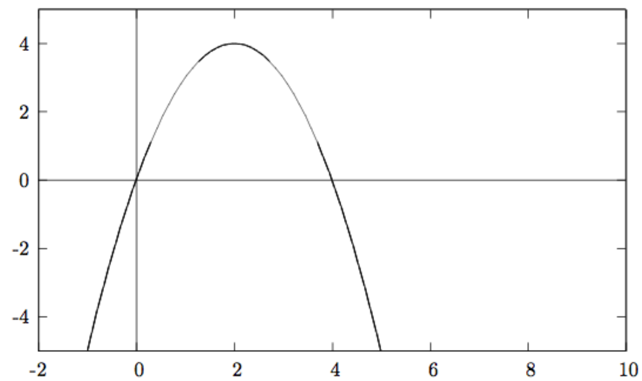
Exercice 3

1. On a le polynôme $P(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$ que l'on souhaite mettre sous la forme $P(x) = (Q(x))^2$. P étant de degré 4, Q est forcément de degré 2. Posons alors $Q(x) = ax^2 + bx + c$ et développons Q^2 :

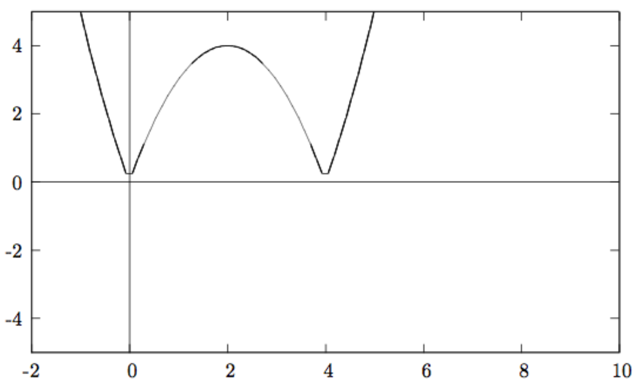
$$\begin{aligned} (Q(x))^2 &= \left(ax^2 + bx + c\right)^2 \\ &= \left(ax^2 + bx + c\right)\left(ax^2 + bx + c\right) \\ &= a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2 \end{aligned}$$



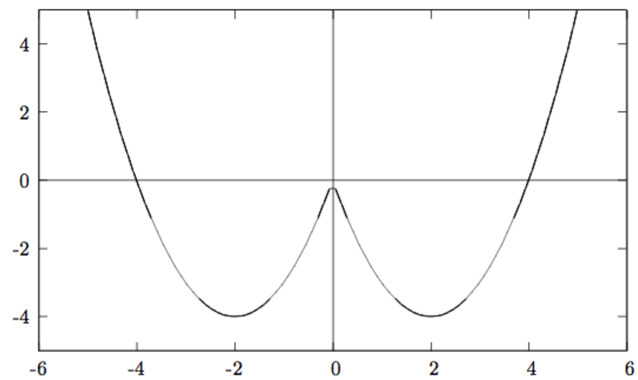
(a) $\mathcal{C}_f$



(b) $\mathcal{C}_g$



(c) $\mathcal{C}_h$



(d) $\mathcal{C}_k$

Par identification terme à terme, on obtient le système :

$$\begin{cases} a^2 & = 1 \\ 2ab & = 6 \\ b^2 + 2ac & = -11 \\ 2bc & = -60 \\ c^2 & = 100 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 3 \\ c & = -10 \end{cases}$$

Car Q et $-Q$ étant indifféremment solutions, on peut donc a ou $-a$: choisissons $a > 0$. Finalement,

$$\boxed{Q(x) = x^2 + 3x - 10}$$

2. Résoudre $P(x) = 0$ revient à résoudre $Q(x) = 0$, soit $x^2 + 3x - 10 = 0$.
   On a $\Delta = 9 + 40 = 49$, d'où :

$$\begin{cases} x_1 & = \dfrac{-3+7}{2} = 2 \\ x_2 & = \dfrac{-3-7}{2} = -5 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{S = \{2\,,\,-5\}}$$

3. (a) On a : $(x+5)(ax^2+bx+c) = ax^3+(5a+b)x^2+(5b+c)x+5c$. Par identification :

$$\begin{cases} a &= 1 \\ 5a+b &= 6 \\ 5b+c &= 6 \\ 5c &= 5 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} a &= 1 \\ b &= 1 \\ c &= 1 \end{cases}}$$

(b) On a :

$$f(x) = \frac{x^4+6x^3-11x^2-60x+100}{x^3+6x^2+6x+5} = \frac{(x^2+3x-10)^2}{(x+5)(x^2+x+1)}$$

Déterminons $\mathcal{D}_f$: on doit avoir $(x+5)(x^2+x+1) \neq 0$, soit $x+5 \neq 0$ et $x^2+x+1 \neq 0$. C'est-à-dire, $x \neq -5$ pour la première condition. Pour la deuxième, cherchons à résoudre $x^2+x+1=0$. $\Delta = -3 < 0$ donc le polynôme reste toujours positif. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.
Les racines du trinôme $x^2+3x-10$ sont -5 et 2 (question 2) donc : $x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$.
Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}, \quad f(x) = \frac{(x+5)^2(x-2)^2}{(x+5)(x^2+x+1)} = \frac{(x+5)(x-2)^2}{x^2+x+1}}$$

Exercice 4 On a :

$$t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{(1+h)^2}-1}{h} = \frac{\dfrac{1}{(1+h)^2}-1}{h} = \frac{1-(1+h)^2}{h(1+h)^2} = \frac{-h^2-2h}{h(1+h)^2}$$

Donc,

$$\boxed{t(h) = \frac{-2-h}{(1+h)^2}}$$

Ainsi,

$$\lim_{h \to 0} t(h) = -2$$

d'où :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -2$$

f est donc dérivable en 1 et $\boxed{f'(1) = -2}$.

Exercice 5 Soit $f(x) = 1-x^2$, la dérivée est $f'(x) = -2x$. Utilisons la formule donnant l'équation de la tangente au point $M(x_0, y_0)$: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 1-x_0^2+(-2x_0)(x-x_0)$.
Pour calculer les coordonnées de A et B, il suffit de remplacer successivement y puis x par 0 dans l'équation précédente :

$$0 = 1-x_0^2+(-2x_0)(x_A-x_0) \qquad\qquad y_B = 1-x_0^2+(-2x_0)(-x_0)$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} x_A &= \dfrac{x_0^2+1}{2x_0} \\ y_A &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_B &= 0 \\ y_B &= x_0^2+1 \end{cases}$$

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle vaut $\dfrac{x_A \times y_B}{2}$, ce qui donne :

$$\mathcal{A} = \frac{(x_0^2+1)^2}{4x_0}$$

Nous avons $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, soit $1 - x_0^2 > 0$, d'où $-x_0^2 > -1$ et $x_0^2 < 1$. Comme $x_0 > 0$, on en déduit alors que $x_0 < 1$. On doit donc avoir $x_0 \in]0,1[$.

Nous voulons déterminer le minimum de $\mathcal{A}$ pour $x_0 \in]0,1[$. Notons pour cela :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{(x^2+1)^2}{4x}$$

Etudions les variations de $\mathcal{A}$ sur $]0,1[$:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x^4+2x^2+1}{4x} = \frac{x^3}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4x}$$

d'où :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^2} = \frac{3x^4+2x^2-1}{4x^2} = \frac{B(x)}{4x^2}$$

avec :

$$B(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$$

où l'on reconnait une équation bicarrée. Posons alors $X = x^2$ et résolvons en X : $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$.

Donc :

$$\begin{cases} X_1 & = \dfrac{-2+4}{6} = \dfrac{1}{3} \\ X_2 & = \dfrac{-2-4}{6} = -1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad 3X^2 + 2X - 1 = 3\left(X - \frac{1}{3}\right)(X+1) = (3X-1)(X+1)$$

Donc :

$$B(x) = (3x^2-1)(x^2+1) = (x\sqrt{3}+1)(x\sqrt{3}-1)(x^2+1)$$

Finalement,

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{(x\sqrt{3}+1)(x\sqrt{3}-1)(x^2+1)}{4x^2}$$

Sur $]0,1[$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$\mathcal{A}'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$\mathcal{A}(x)$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	$\Vert$

$\mathcal{A}(x)$ est minimum pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et vaut alors $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$: le point M recherchée a donc pour coordonnées :

$$\boxed{M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)}$$

Exercice 6

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant l'expression conjuguée pour les racines carrées, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

Les fonctions $x \to \sqrt{x+1}$ et $x \to \sqrt{x}$ sont croissantes sur $[-1, +\infty[$ et $[0, +\infty]$ respectivement, donc la finction $x \to \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ est croissantes sur $[0, +\infty[$ par somme de fonctions croissantes. La fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ est quant à elle décroissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

2. On a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0}$.

Exercice 7

1. Au premier lancer du dé, on otient un six possibilités (de 1 à 6), que l'on retrouve au second lancer et encore au troisième lancer : au total, il y a donc $6^3 = 216$ triplets possibles.

2. (a) Ici, seul compte le premier lancer, où l'on veut obtenir un 6, soit une possibilité sur 6. La probabilité associée vaut donc

$$P(6, *, *) = \frac{1}{6}$$

où * représente n'importee quel chiffre sur les deuxième et troisième lancers.

   (b) Il est demandé ici de calculer la probabilité d'obtenir exactement un 6 sur les trois lancers. Commençons par étudier le cas où seul le premier lancer donne un 6, soit 1 possibilité sur 6. Ni le deuxième lancer ni le troisième de doivent être un 6, soit chaque fois 5 possibilités sur 6. Il y a finalement, pour les trois lancers réunis, $1 \times 5 \times 5 = 25$ possibilités. Même calculs si l'unique 6 est obtenu au deuxième ou au troisième lancer. Au total, $3 \times 25 = 75$ possibilités. La probabilité associée vaut donc :

$$P(\text{“un 6”}) = \frac{75}{216} = \frac{25}{72}$$

   (c) On veut déterminer la probabilité qu'il y ait exactement deux 6 sur les trois lancers. Soit le cas où les deux premiers lancers sont des 6. Il y a une seule possibilité pour les deux premiers lancers et 5 pour le troisième, ce qui donne $1 \times 1 \times 5 = 5$ possibilités pour les trois lancers réunis. L'ordre d'obtention de deux 6 étant ici encore indifférent, on a donc un total de $5+5+5 = 15$ possibilitéss. La probabilité d'obtenir exactement deux 6 avec trois lancers est donc :

$$P(\text{“deux 6”}) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

(d) A chacun des trois lancers, il y a une seule possibilité d'obtenir un 6. Soit au total $1 \times 1 \times 1 = 1$ possibilité. La probabilité correspondante est donc :

$$P(\text{“trois 6”}) = \frac{1}{216}$$

(e) A chacun des trois lancers, l'évènement “ne pas obtenir de 6” a 5 possibilités sur 6 de se réaliser, soit au total $5 \times 5 \times 5 = 125$ possibilités. D'où la probabilité :

$$P(\text{“aucun 6”}) = \frac{125}{216}$$

Vérification : On remarquera aisément que l'univers des ossibles est bien représentée par les évènements (b) à (e) : dans chacun des tirages possibles, il y a forcément 1,2,3 ou aucun 6. Numériquement, la probabilité de réalisation de l'un de ces évènements correspond à celle de l'évènement certain, soit 1 :

$$P(\text{“un 6”}) + P(\text{“deux 6”}) + P(\text{“trois 6”}) + P(\text{“aucun 6”}) = \frac{75+15+1+125}{216} = 1$$

Exercice 8

1. G existe car $2 + (-3) = -1 \neq 0$. On a de plus :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-3}{2+(-3)}\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$$

H existe car : $-3 + 2 = -1 \neq 0$. Et de même :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{-3+2}\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$$

2. On a :

$$\overrightarrow{C'G} + \overrightarrow{C'H} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}$$

Or C' est le milieu de $[AB]$, donc $2\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{BA}$, et d'après la quetion précédente :

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

d'où :

$$\overrightarrow{C'G} + \overrightarrow{C'H} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$

Donc C' est le milieu de $[GH]$ et alors, $\boxed{G \text{ et } H \text{ sont symétriques par rapport à } C'}$.

3. Soit G le barycentre de (A, a) et (B, b) et H le barycentre de (A, b) et (B, a), avec $a + b \neq 0$. On a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AH} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AB}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C'G}+\overrightarrow{C'H} &= 2\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}\\ &= \overrightarrow{BA}+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\right)\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Le résultat peut donc être généralisé.

4. Soit I tel que $\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{BA}-5\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{BA}-5\overrightarrow{BC} \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{BI}-3(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IA})+5(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC})=\overrightarrow{0}\\ &\Longleftrightarrow \quad -3\overrightarrow{BI}-3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{x=y=-3 \text{ et } z=5}$ conviennent.

5. H est le barycentre de $(A,-3)$ et $(B,2)$ donc, pour tout M du plan, on a :

$$-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=(-3+2)\overrightarrow{MH}$$

soit :

$$-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MH} \qquad \text{ou} \qquad 3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MH}$$

Donc :

$$\begin{aligned}||3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}||=3AC \quad &\Longleftrightarrow \quad ||\overrightarrow{MH}||=3AC\\ &\Longleftrightarrow \quad MH=3AC\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } E \text{ des points } M \text{ solutions est donc le cercle de centre } H \text{ et de rayon } 3AC.}$$

Exercice 9 Le cercle que l'on doit détermnier passe par les deux points $A(2,-1)$ et $B(1,3)$. Le centre se situe donc nécessairement sur la médiatrice de $[AB]$. Le milieu de $[AB]$ est le point $I(\frac{3}{2},1)$. Cherchons une équation de la médiatrice de $[AB]$. Pour cela, écrivons qu'avec I milieu de $[AB]$, le point $M(x,y)$ est sur la médiatrice si seulement si $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. On a :

$$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-\dfrac{3}{2}\\ y-1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix}$$

d'où une équation de la médiatrice de $[AB]$ est :

$$x-4y+\frac{5}{2}=0$$

Déterminons-en alors l'intersection avec la droite donnée :

$$\begin{cases}x+y+1 &=0\\ x-4y+\dfrac{5}{2} &=0\end{cases}$$

En faisant la différence des deux équations, nous obtenons :

$$5y - \frac{3}{2} = 0$$

Donc :

$$y = \frac{3}{10} \qquad \text{et} \qquad x = -\frac{13}{10}$$

sont les coordonnées du centre du cercle. Notons Ω ce centre.

$$\boxed{\Omega\left(-\frac{13}{10}, \frac{3}{10}\right)}$$

Pour trouver le rayon r du cercle, on a :$r = ||\overrightarrow{\Omega B}||$, donc :

$$||\Omega B||^2 = r^2 = \left(1 + \frac{13}{10}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{1258}{100}$$

d'où $\boxed{r = \sqrt{12.58} \approx 3.55}$.

Exercice 10

1. On a :

$$\overrightarrow{AB}\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AE}\,(2, 2, -1)$$

   d'où : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$, donc A, B et E sont alignés.

2. On a :

$$\overrightarrow{AB}\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{DC}\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

   Les droites (AB) et (CD) étant distinctes, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ prouve que $ABCD$ est un parallélogramme.

3. On a :

$$\overrightarrow{AF}\,(5, 5, -13) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AB}\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\left(2, 2, -\frac{9}{2}\right)$$

   Pour prouver que $F \in (ABC)$, il suffit de trouver x et y tels que : $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} 5 &= x + 2y \\ -13 &= -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}y \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x + 2y &= 5 \\ x + 9y &= 26 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc : $F \in (ABC)$ et $F(-1, 3)$ dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.