Exercices variés (Première S)

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-2x^2 + 3x + 5 = 0$
2. $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$
3. $2x^4 + 9x^2 + 4$
4. $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$, avec $\alpha > \beta$

Exercice 2 Soit $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x$. Tracer $\mathcal{C}_f$ puis déterminer les courbes représentatives $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_k$ des fonctions g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -f(x) \qquad h(x) = |f(x)| \qquad k(x) = f(|x|)$$

Exercice 3 Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$$

1. Trouver un polynôme Q tel que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (Q(x))^2$
2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
3. (a) Trouver les réels a, b, c tels que : $\quad x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(ax^2 + bx + c)$

   (b) Simplifier la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100}{x^3 + 6x^2 + 6x + 5}$$

Exercice 4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
On pose :

$$t(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Montrer que l'on a :

$$t(h) = \frac{-2 - h}{(1+h)^2}$$

En déduire que f est dérivable au point 1 et préciser son nombre dérivé.

Exercice 5 Soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal. La tangente en $M(x_0, y_0)$, avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, de la parabole d'équation $y = 1 - x^2$ coupe en A l'axe des abscisses et en B celui des ordonnées. Déterminer les coordonnées du point M pour que l'aire du triangle OAB soit minimale.

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite déinie par :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

1. Cette suite est-elle croissante ou décroissante ?
2. Est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

Exercice 7 Les faces d'un dé cubique sont numérotées de 1 à 6. On lance trois fois de suite le dé.

1. Combien y a-t-il de triplets possibles ?
2. Tous les triplets sont supposés équiprobables. Quelles sont les probabilités des évènements suivants :

   A : "Le premier lancer donne un 6"

   B : "Il y a exatement un 6 sur les trois lancers"

   C : "Il y a exatement deux 6 sur les trois lancers"

   D : "On a obtenu trois fois le chiffre 6"

   E : "On n'a jamais obtenu le chiffre 6"

Exercice 8 Soit ABC un triangle. On note A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Constuire, s'ils existent, le barycentre G des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, -3)$ et le barycentre H des points pondérés $(A, -3)$ et $(B, 2)$.
2. Montrer que G et H sont symétriques par rapport à C'.
3. Peut-on généraliser pour G barycentre de (A, a) et (B, b) et H barycentre de (A, b) et (B, a) si les réels a et b sont de somme non nulle $(a + b \neq 0)$?
4. Soit le point I tel que : $\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{BC}$.
   Trouver trois réels x, y, z tels que I soit le barycentre de (A, x), (B, y) et (C, z).
5. Déterminer l'ensemble E des points M du plan qui vérifient :

$$\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right\| = 3AC$$

Exercice 9 Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Déterminer le rayon du cercle passant par les points $A(2, -1)$ et $B(1, 3)$ et dont le centre est sur la droite d'équation $x + y + 1 = 0$.

Exercice 10 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points A, B, C, D, E et F par leurs coordonnées :

$$A\,(1, 0, 2) \quad B\left(2, 1, \frac{3}{2}\right) \quad C\left(3, 2, \frac{-5}{2}\right) \quad D\,(2, 1, -2) \quad E\,(3, 2, 1) \quad F\,(6, 5, -11)$$

Montrer que :

1. A, B et E sont alignés.
2. $ABCD$ est un parallélogramme.
3. F est dans le plan (ABC). On précisera les coordonnées x et y de F dans le plan $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.)