IN 101 - TD 03
1 octobre 2009

Énoncé

Le but du TD est de bien comprendre les fonctions et la programmation récursive.

Exercice 1 : Date

1.a] Écrire une fonction qui détermine si une année est bissextile ou non.
On rappelle que les années bissextiles sont multiples :
- soit multiples de 4 mais pas de 100,
- soit divisibles par 400.

1.b] Écrire une fonction qui détermine le numéro d'un jour dans l'année en fonction du jour, du mois, et de l'année. Vous pouvez vérifier en tapant la commande `date +%j`

1.c] Écrire une fonction qui calcule le nombre de jours écoulés entre le 1er janvier 2000 et une date ultérieure.

Exercice 2 : Programmation Récursive

2.a] Programmer la fonction factorielle par récursivité.

2.b] Programmer le PGCD de façon récursive.

2.c] Programmer l'exponentiation binaire de manière récursive. Cette fonction consiste à calculer a^e en appelant $(a * a)^{e/2}$ si e est pair, et $a * a^{e-1}$ si e est impair et retourne 1 si $e = 0$.

Exercice 3 : Fibonacci

3.a] Calculer le n nombre de Fibonacci F_n qui est défini de la manière suivante : $F_0 = F_1 = 1$ et $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ pour $i \geq 2$.

3.b] Proposer une variante non récursive.

3.c] Optimiser votre programme pour qu'il n'utilise que deux entiers.
Cette dernière technique s'appelle de la programmation dynamique : au lieu de recalculer plusieurs fois la même valeur, on la met dans un tableau. Ici, on n'a même pas besoin de stocker tout le tableau car on n'a besoin que des deux derniers éléments pour calculer la valeur de la case suivante du tableau.

Exercice 4 : Conjecture de Collatz

Soit la fonction f des entiers positifs vers les entiers positifs, définie de la façon suivante :
- si $n = 1$, $f(1) = 1$,
- si n est pair, $f(n) = n/2$, et
- si n est impair, $f(n) = 3n + 1$.

Considérons la suite définie par récurrence, $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, par u_0 et $u_i = f(u_{i-1})$ pour $i \geq 1$. Par exemple, pour $n = 6$, votre fonction doit afficher, $6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$.

4.a] Écrire une fonction qui affiche les valeurs de cette suite pour un entier u_0 donné.

On ne sait pas montrer que pour toute valeur de n, cette suite converge vers 1 car la valeur de f ne décroît pas toujours. Si on était parti de $n = 27$, la suite aurait mis 111 étapes avant de se terminer par 1.

Exercice 5 : Problème des 8 reines (à la maison)

5.a] On veut positionner 8 reines sur un échiquier sans qu'aucune reine soit en prise avec une autre. On rappelle que les reines peuvent se déplacer en diagonale, en ligne ou en colonne d'un nombre de cases arbitraire. Comme on doit avoir au plus une reine par ligne, on va représenter un échiquier en utilisant un tableau de 8 entiers où la i-ième case correspondra à la position de la reine sur la i-ième ligne. Utiliser un algorithme récursif.